

Cálculo Numérico

Método de Gauss-Jacobi



Prof. Flávio Murilo de Carvalho Leal
Centro Universitário de Juazeiro do Norte
Uninassau

O método de Gauss-Jacobi é um método iterativo para resolver sistemas lineares da forma:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

onde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

A ideia é transformar o sistema em uma forma equivalente:

$$\mathbf{x} = T\mathbf{x} + \mathbf{c},$$

e gerar uma sequência de aproximações $\mathbf{x}^{(k)}$ que (espera-se) convirja para a solução exata.

Decompõe-se a matriz A como:

$$A = D - L - U,$$

onde:

D : matriz diagonal com os elementos da diagonal de A ;

$-L$: parte estritamente triangular inferior de A ;

$-U$: parte estritamente triangular superior de A .

O método de Gauss-Jacobi reescreve o sistema como:

$$D\mathbf{x} = (L + U)\mathbf{x} + \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = D^{-1}(L + U)\mathbf{x} + D^{-1}\mathbf{b}.$$

Assim, a iteração é dada por:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = D^{-1}(L + U)\mathbf{x}^{(k)} + D^{-1}\mathbf{b}.$$

Para cada componente $i = 1, 2, \dots, n$, a iteração de Gauss-Jacobi é:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right).$$

Observações:

Todos os valores do passo k são usados para calcular o passo $k + 1$;

Os novos valores só são usados na próxima iteração (diferente do Gauss-Seidel).

Uma condição suficiente (mas não necessária) para a convergência do método de Gauss-Jacobi é que a matriz A seja **estritamente diagonal dominante**, ou seja:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad \text{para todo } i = 1, \dots, n.$$

Outra condição é que o raio espectral da matriz de iteração $T = D^{-1}(L + U)$ satisfaça $\rho(T) < 1$.

Considere o sistema:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

A matriz A é estritamente diagonal dominante, logo o método converge.
Isolando cada variável:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10} \left(7 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)} \right)$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{5} \left(-8 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)} \right)$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10} \left(6 - 2x_1^{(k)} - 3x_2^{(k)} \right)$$

Iteração 1:

$$\begin{aligned}x_1^{(1)} &= \frac{1}{10}(7 - 0 - 0) = 0.7 \\x_2^{(1)} &= \frac{1}{5}(-8 - 0 - 0) = -1.6 \\x_3^{(1)} &= \frac{1}{10}(6 - 0 - 0) = 0.6\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.7 \\ -1.6 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

Iteração 2:

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{10}(7 - 2(-1.6) - 0.6) = \frac{1}{10}(7 + 3.2 - 0.6) = 0.96$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{5}(-8 - 0.7 - 0.6) = \frac{-9.3}{5} = -1.86$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{10}(6 - 2(0.7) - 3(-1.6)) = \frac{1}{10}(6 - 1.4 + 4.8) = 0.94$$

Continuando as iterações, a sequência converge para a solução exata $\mathbf{x} = [1, -2, 1]^T$.